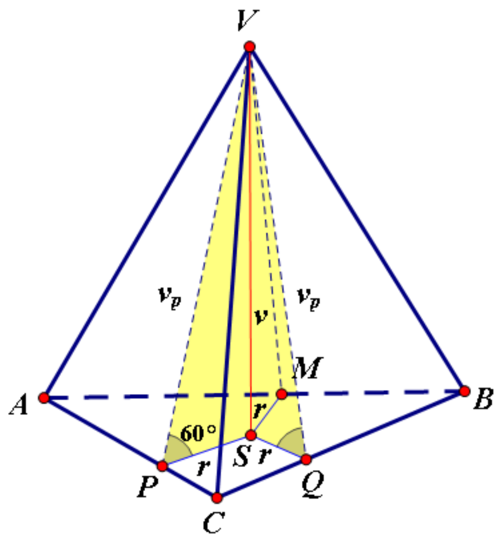
(stereometrije) po temi i težini mogu pojaviti na natjecanjima iz matematike u srednjoj školi. Komentirat ćemo jesu li primjereni uzrastu i predznanju učenika te koje su težine.

Zadatak 1. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2011., 3. razred - srednja škola - B varijanta)

Osnovka trostrane piramide je pravokutan trokut s katetama duljine 12 cm i 35 cm. Sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60°. Odredite oplošje i volumen piramide.

Rješenje:



Slika 2.1: Skica za zadatak 1.

Baza piramide je trokut ABC, a vrh ćemo označiti s V (Slika 2.1). Primjenom Pitagorina poučka izračunamo hipotenuzu osnovke trostrane piramide:

$$c = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37\,\text{cm}.$$

Označimo sa S nožište visine piramide. Točke M, P, Q su nožišta visina iz vrha V na stranice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$. Primijetimo da su trokuti SMV, SQV i SPV pravokutni s pravim kutom kod vrha S.

Trokuti SMV, SQV i SPV su međusobno u parovima sukladni. Naime, u svakom trokutu imamo pravi kut i kut od 60° pa je treći kut u svakom trokutu 30°. Trokuti imaju i jednu stranicu jednake duljine pa koristimo KSK teorem o sukladnosti. Konačno zaključujemo da su dužine $\overline{MS}$, $\overline{PS}$ i $\overline{QS}$ okomite na stranice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ te su jednakih duljina. Time smo dokazali da je nožište S visine piramide ujedno i središte trokutu ABC upisane kružnice. Označimo radijus te kružnice s r.

Kako je trokut ABC pravokutan, četverokut $PCQS$ ima tri prava kuta pa je ujedno i kvadrat. Iz toga slijedi da je $|CP| = |CQ| = r$.

Zbog sukladnosti trokuta AMS i APS, te trokuta BMS i BQS vrijedi

$$c = |AM| + |BM| = |AP| + |BQ|,$$

odnosno

$$c = (|AC| - |PC|) + (|BC| - |CQ|).$$

Označimo $|AC| = b$ i $|BC| = a$. Kako smo zaključili da je $|CP| = |CQ| = r$, slijedi

$$c = (b - r) + (a - r).$$

Tada je radijus upisane kružnice $r = \frac{a+b-c}{2} = 5$ cm.

Napomena: Površina trokuta ABC može se izračunati i kao zbroj površina trokuta BAS, ACS i CBS i pomoću umnoška kateta. Sada radijus upisane kružnice r možemo izračunati izjednačavanjem dviju formula za površinu $r \cdot s = \frac{ab}{2}$, gdje je s poluopseg trokuta ABC te ga računamo po formuli $s = \frac{a+b+c}{2}$. Uvrštavanjem u izjednačene formule dobivamo da je radijus upisane kružnice $r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$. Dobivamo $r = 5$ cm.

Sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60° pa slijedi da visine svih pobočki (označimo ih s v_p) imaju iste duljine. Iz trokuta SPV primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu slijedi

$$\cos 60^\circ = \frac{r}{v_p},$$

odnosno

$$v_p = \frac{r}{\cos 60^\circ}.$$

Konačno imamo

$$v_p = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}.$$

Visina cijele piramide, v iznosi

$$v = \sin 60^\circ \cdot v_p,$$

iz čega slijedi

$$v = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Oplošje je površina mreže piramide koja se sastoji od trokuta ABC (osnovka piramide) i tri trokuta ABV, ACV, BCV (pobočje piramide).

Površinu osnovke označimo s B i računamo po formuli za površinu trokuta

$B = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trokuta ABC.

Površinu pobočja označimo s P i računamo kao zbroj površina tri trokuta:

$$P = P_{ABV} + P_{ACV} + P_{BCV} = \frac{c \cdot v_p}{2} + \frac{b \cdot v_p}{2} + \frac{a \cdot v_p}{2} = \frac{(a + b + c) \cdot v_p}{2}.$$

Konačno imamo

$$O = B + P = \frac{12 \cdot 35}{2} + \frac{10 \cdot (35 + 12 + 37)}{2} = 210 + 420 = 630 \text{ cm}^2.$$