INTEGRALI ZADACI (III-DEO) PARCIJALNA INTEGRACIJA

Ako su u i v diferencijabilne funkcije od x , onda je :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Ova metoda, parcijalna integracija, po pravilu je na početku proučavanja slabo razumljiva. Mi ćemo pokušati , koliko to dozvoljava pisana reč da vam je približimo i objasnimo .

Zadati integral mi upoređujemo sa $\int udv$. "Nešto" (recimo Θ) izaberemo da je u , a "nešto" (recimo Δdx) izaberemo da je dv. Od onog što smo izabrali da je u tražimo izvod , a od onog što smo izabrali da je dv tražimo integral.

$$\left| \begin{array}{ll} \Theta = u & \Delta dx = dv \\ \Theta` dx = du & \int \Delta dx = v \end{array} \right|$$

Kad nađemo du i v to menjamo u formulu parcijalne integracije: $uv - \int vdu$. Ideja parcijalne integracije je da novodobijeni integral $\int vdu$ bude lakši od početnog $\int udv$. Ako dobijemo da on nije lakši, znači da smo pogrešno izabrali u i dv.

Najčešći **primer** na kome profesori objašnjavaju parcijalnu integraciju je :

$\boxed{\text{primer 1.}}$ $\int xe^x dx = ?$

Ovaj integral upoređujemo sa $\int udv$. Izabraćemo da je $x = u$ a $e^x\, dx = dv$.

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & e^x dx = dv \\ dx = du & \int e^x dx = v \\ & e^x = v \end{array} \right| = \text{ovo sad menjamo u} \quad u \cdot v - \int vdu$$

$$= \underbrace{x \cdot e^x}_{u \cdot v} - \underbrace{\int e^x dx}_{\int v \cdot du} = xe^x - e^x + C = \boxed{e^x(x-1)+C}$$

A šta bi se desilo da smo birali pogrešno? Da vidimo:

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & \text{x}dx = dv \\ e^x dx = du & \int xdx = v \\ & \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \boxed{\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx} \rightarrow \text{ovaj integral je teži od početnog!}$$

Da bi "pametno" birali ove integrale ćemo podeliti u 4. grupe.

1. ***GRUPA*** Ovde ćemo birati da je x ili izraz vezan sa x jednak *u*, a sve ostalo je *dv*

Na primer : $\int x\cos xdx$, $\int(1-x)\sin xdx$, $\int xe^x dx$, $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$, $\int(x^2-2x+5)e^{-x}dx$ itd.

2. *GRUPA* Ovde ne uzimamo x za u , već funkciju pored x , (odnosno izraza sa x). lnx = *u*, arcsinx = *u*, arctgx = *u* a sve ostalo je *dv*.

Na primer : $\int x\ln xdx$ $\int x\arcsin xdx$, $\int x^2 arctgxdx$, $\int x^3\ln xdx$ itd.

3. ***GRUPA*** Ovde ćemo uzimati *dx=dv*, a unutrašnja funkcija je *u*, kao u 2. grupi

Na primer : $\int \ln xdx$, $\int \ln^2 xdx$, $\int arctgxdx$, $\int \arcsin xdx$ itd.

4. ***GRUPA*** To su kružni integrali, koji uvek imaju svog "para" preko koga se dati integral vraća na početak…

Na primer : $\int e^x\sin xdx$, $\int e^x\cos xdx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$ itd.

Od svake grupe ćemo uraditi po nekoliko primera...

Jasno je da urađeni primer $\int xe^x dx$ pripada prvoj grupi.

$\boxed{\text{primer 2.}}$ $\int(1-x)\sin xdx = ?$

$$\int(1-x)\sin xdx = \left|\begin{array}{ll} 1-x=u & \text{sinxdx=dv} \\ -dx=du & \int \text{sinxdx}=v \\ & -\cos x=v \end{array}\right| = \underbrace{(1-x)(-\cos x)}_{u\cdot v} - \underbrace{\int(-\cos x)(-dx)}_{\int vdu} = \boxed{(x-1)\cos x-\sin x+C}$$

$\boxed{\text{primer 3.}}$ $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = ?$

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left|\begin{array}{ll} x=u & \frac{dx}{\cos^2 x}=dv \\ dx=du & \int \frac{dx}{\cos^2 x}=v \\ & tgx=v \end{array}\right| = x\cdot tgx - \int tgxdx =$$

izvući ćemo $\int tgxdx$ ' na stranu' , rešiti ga , pa ćemo se vratiti u parcijalnu integraciju...

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{vmatrix} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

vratimo se u zadatak:

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = x \cdot tgx - \int tgxdx = x \cdot tgx - (-\ln|\cos x|) + C = \boxed{x \cdot tgx + \ln|\cos x| + C}$$

$\boxed{\text{primer 4.}}$ $\int x \ln xdx = ?$

Ovde je primamljivo uzeti da je $x = u$, ali bi nas to odvelo u ćorsokak...

Ovaj integral je iz II grupe:

$$\int x \ln xdx = \begin{vmatrix} \ln x = u & \int xdx = v \\ \frac{1}{x}dx = du & \frac{x^2}{2} = v \end{vmatrix} = \underbrace{\ln x \cdot \frac{x^2}{2}}_{u \cdot v} - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx}_{\int vdu} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

$\boxed{\text{primer 5.}}$ $\int x \cdot arctgxdx = ?$

$$\int x \cdot arctgxdx = \begin{vmatrix} arctgx = u & \int xdx = v \\ \frac{1}{1+x^2}dx = du & \frac{x^2}{2} = v \end{vmatrix} = arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Ovde ćemo stati i $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ rešiti na stranu pa ubaciti rešenje…Ovo je onaj trik integral , objašnjen u I delu.

Da se podsetimo:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \int \cancel{\frac{x^2+1}{x^2+1}}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \boxed{x - arctgx}$$

Sada je: $\int x \cdot arctgxdx = arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \boxed{arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - arctgx) + C}$

$\boxed{\text{primer 6.}}$ $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

I ovo je integral iz II grupe al je malo teži i ima više posla.

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} \arccos x = u & \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = dv \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du & \boxed{\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = v} \end{array} \right| = \text{ Uokvireni integral ćemo rešiti “na stranu”}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\boxed{x^2}\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t^2 \\ -\cancel{2}xdx = \cancel{2}tdt \\ xdx = -tdt \\ 1-x^2 = t^2 \to x^2 = \boxed{1-t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{\cancel{t}}(-\cancel{t}dt) = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{t^3-3t}{3} =$$

$$\frac{t(t^2-3)}{3} = \frac{\sqrt{1-x^2}(1-x^2-3)}{3} = \frac{\sqrt{1-x^2}(-x^2-2)}{3} = -\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}$$

Vratimo se sada u parcijalnu integraciju:

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} \arccos x = u & \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = dv \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du & -\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3} = v \end{array} \right| =$$

$$= \arccos x \cdot (-\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}) - \int [-\frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}(x^2+2)}{3}][-\frac{dx}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}]$$

$$= -\arccos x \cdot (\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}) - \frac{1}{3}\int (x^2+2)dx$$

$$= \boxed{-\arccos x \cdot (\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}) - \frac{1}{3}(\frac{x^3}{3} + 2x) + C}$$

$\boxed{\text{primer 7.}}$ $\int \ln x dx = ?$

Ovo je integral iz naše III grupe.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x = u & dx=dv \\ \frac{1}{x}dx = du & \int dx = v \\ & x = v \end{array} \right| = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}dx = x\ln x - x + C = \boxed{x(\ln x - 1) + C}$$

$\boxed{\text{primer 8.}}$ $\int \ln^2 x dx = ?$

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} \ln^2 x = u & dx=dv \\ ?\, dx = du & \int dx = v \\ & x = v \end{array} \right|$$, da nađemo mi ovaj izvod “na stranu”, jer se radi o složenoj funkciji.

$$(\ln^2 x)` = 2\ln x \cdot (\ln x)` = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

Vratimo se na zadatak:

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} \ln^2 x = u & dx=dv \\ \frac{2\ln x}{x}dx = du & \int dx = v \\ & x = v \end{array} \right| = \ln^2 x \cdot x - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x}dx = x \cdot \ln^2 x - 2\int \cancel{x} \cdot \frac{\ln x}{\cancel{x}}dx = x \cdot \ln^2 x - 2\boxed{\int \ln x dx}$$

Radili smo i dobili $\int \ln x dx$, koji smo rešili u prethodnom primeru. Znači ovde bi morali da radimo novu parcijalnu integraciju!

Iskoristićemo rešenje prethodnog primera da je $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$

Pa će rešenje našeg integrala biti:

$$\int \ln^2 x dx = x \cdot \ln^2 x - 2\boxed{\int \ln x dx} = x \cdot \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C = \boxed{x \cdot (\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C}$$

$\boxed{\text{primer 9.}}$ $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = ?$

Ovo je već ozbiljniji primer i imaćemo više posla…

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = \left| \begin{matrix} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = u & dx = dv \\ ?\, du & x = v \end{matrix} \right|$$, kao i obično, složeni izvod ćemo " na stranu"

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]` = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})` = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)`)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}} \cdot (\frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Vratimo se u zadatak:

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = \left| \begin{matrix} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = u & dx = dv \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = du & x = v \end{matrix} \right| = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \cdot x - \boxed{\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx} =$$

Opet problem, izvučemo uokvireni integral i rešimo ga metodom smene:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+x^2} = t \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt \end{matrix} \right| = \int dt = t = \sqrt{1+x^2}$$

Konačno, rešenje će biti:

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = \boxed{x \cdot \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C}$$

I još da pokažemo par primera iz IV grupe.

$\boxed{\text{primer 10.}}$ $\int \sin(\ln x)dx = ?$

Krenemo sa parcijalnom integracijom (početni integral najčešće obeležavamo sa I):

$$I = \int \sin(\ln x)dx = \left| \begin{array}{ll} \sin(\ln x) = u & dx = dv \\ \cos(\ln x)\cdot(\ln x)`dx = du & x = v \\ \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx & \end{array} \right| =$$

$$= \sin(\ln x)\cdot x - \int \cancel{x}\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = \sin(\ln x)\cdot x - \int \cos(\ln x)dx$$

Za sada $\boxed{I = \sin(\ln x)\cdot x - \int \cos(\ln x)dx}$

*

Integral $\int \cos(\ln x)dx$ radimo " na stranu" , opet parcijalnom integracijom:

$$\int \cos(\ln x)dx = \left| \begin{array}{ll} \cos(\ln x) = u & \text{dx=dv} \\ \text{-sin(lnx)}\frac{1}{x}dx = du & x = v \end{array} \right| =$$

$$\cos(\ln x)\cdot x - \int \cancel{x}(\text{-sin(lnx)}\frac{1}{\cancel{x}})dx = \cos(\ln x)\cdot x + \int \sin(\ln x)dx = \cos(\ln x)\cdot x + I$$

Dakle imamo $\boxed{\int \cos(\ln x)dx = \cos(\ln x)\cdot x + I}$

Vratimo se na *

$I = \sin(\ln x)\cdot x - \int \cos(\ln x)dx$ ovde zamenimo da je $\int \cos(\ln x)dx = \cos(\ln x)\cdot x + I$

$$I = \sin(\ln x)\cdot x - [\cos(\ln x)\cdot x + I]$$
$$I = \sin(\ln x)\cdot x - \cos(\ln x)\cdot x - I$$
$$I + I = \sin(\ln x)\cdot x - \cos(\ln x)\cdot x$$
$$2I = x\cdot[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$$
$$\boxed{I = \frac{x\cdot[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]}{2} + C}$$

Konstantu C dodamo tek kad izrazimo *I*.

Profesori najviše vole da ovaj tip integrala objasne (a posle vala i pitaju) na integralima:

$\int e^x \sin x dx$ i $\int e^x \cos x dx$

Mi ćemo uraditi jedan uopšteniji primer :

$\boxed{\text{primer 11.}}$ $\int e^{ax} \sin bx dx = ?$

Startujemo sa parcijalnom integracijom…(i naravno ovaj integral obeležimo sa *I*)

$$I = \int e^{ax} \sin bx dx = \left| \begin{array}{ll} \sin bx = u & e^{ax} dx = dv \\ \cos bx \cdot (bx)` dx = du & \int e^{ax} dx = v \\ b \cos bx dx = du & \frac{1}{a} e^{ax} = v \end{array} \right| =$$

$$= \sin bx \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} b \cos bx dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx$$

Za sad dakle imamo $I = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \boxed{\int e^{ax} \cos bx dx}$

Rešavamo $\int e^{ax} \cos bx dx$, pa ćemo to rešenje vratiti…

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \left| \begin{array}{ll} \cos bx = u & e^{ax} dx = dv \\ -\sin bx \cdot (bx)` dx = du & \int e^{ax} dx = v \\ -b \sin bx dx = du & \frac{1}{a} e^{ax} = v \end{array} \right| =$$

$$= \cos bx \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} (-b \sin bx) dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx$$

Dakle : $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx$ to jest

$$\boxed{\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \cdot I}$$

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$$

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\cdot I\right)$$ odavde moramo da izrazimo I

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b\cdot e^{ax}\cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\cdot I \quad ..../\bullet a^2$$

$$a^2\cdot I = a\cdot e^{ax}\sin bx - b\cdot e^{ax}\cos bx - b^2\cdot I$$

$$a^2\cdot I + b^2\cdot I = a\cdot e^{ax}\sin bx - b\cdot e^{ax}\cos bx$$

$$I(a^2+b^2) = a\cdot e^{ax}\sin bx - b\cdot e^{ax}\cos bx$$

$$I = \frac{a\cdot e^{ax}\sin bx - b\cdot e^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}$$

$$\boxed{I = \frac{e^{ax}(a\cdot\sin bx - b\cdot\cos bx)}{a^2+b^2} + C}$$

Rešenje ovog uopštenog integrala možemo primeniti da rešimo recimo $\int e^x \sin x dx$. *Kako?*

Za $a=1$ i $b=1$ je $\frac{e^{ax}(a\cdot\sin bx - b\cdot\cos bx)}{a^2+b^2} = \frac{e^{1x}(1\cdot\sin 1x - 1\cdot\cos 1x)}{1^2+1^2} = \boxed{\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}}$

Dakle: $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$

primer 11. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ?$

Ovo je jedan od poznatijih integrala koga možemo rešiti na nekoliko načina.

Ajmo da vidimo kako bi to išlo pomoću parcijalne integracije...

Najpre vršimo malu racionalizaciju podintegralne funkcije:

$$\sqrt{a^2-x^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Dakle , sada imamo dva integrala(početni integral ćemo označiti sa I):

$$I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx - \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

Prvi od njih je tablični: $\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a}$

A drugi ćemo rešiti parcijalnom integracijom:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = dv \\ dx = du & \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = v \end{array} \right| =$$

Rešimo ovaj integral posebno:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} a^2 - x^2 = t^2 \\ -\cancel{2}xdx = \cancel{2}tdt \\ xdx = -tdt \end{array} \right| = \int \frac{-\cancel{t}dt}{\cancel{t}} = -t = -\sqrt{a^2-x^2}$$

Vratimo se sada u parcijalnu integraciju:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = dv \\ dx = du & \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = v \\ & -\sqrt{a^2-x^2} = v \end{array} \right| = -x\sqrt{a^2-x^2} - \int(-\sqrt{a^2-x^2})dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int(\sqrt{a^2-x^2})dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + I$$

Da se podsetimo početka:

$$I = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$I = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} - (-x\sqrt{a^2-x^2} + I)$$

$$I = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - I$$

Prebacimo I na levu stranu!

$I + I = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} \rightarrow 2I = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}$ i konačno:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C}$$

Ovaj integral možemo rešiti elegantnije primenom odgovarajuće smene, ali to u sledećem fajlu…