

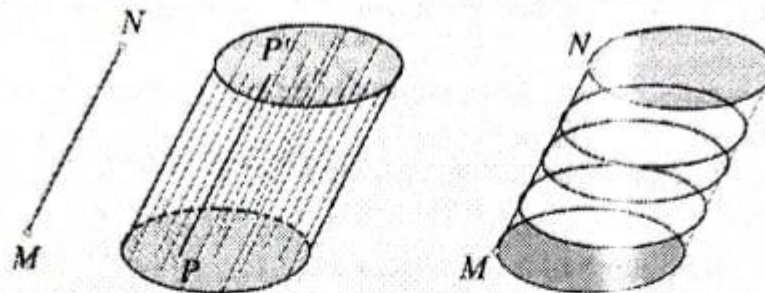
NASTAVNA JEDINKA: VALJAK

Dobar dan svima, danas učimo o valjku!

Nakon što uradite sve iz sljedećih uputa, sve to skupa slikate i šaljete na standardni način.

Najprije napišite naslov i nacrtajte slikus s prve slike ispod i prepisite popratni tekst.

Na predmete u obliku valjka svakodnevno nailazimo u našoj okolini. Na slici vidimo jedan lijep primjer, riječku katedralu sv. Vida.



Prikazani su načini dobivanja valjka. Možemo zamisliti da dužine paralelne s \overline{MN} putuju tako da im jedna krajnja točka bude u donjoj bazi. Isto tako možemo zamisliti da se baza translacija duž jedne svoje izvodnice.

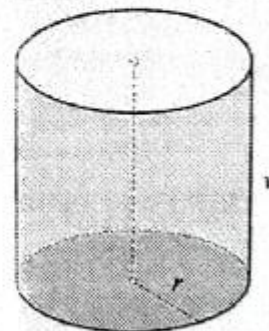
Valjak

Osnovke valjka su krugovi. Udaljenost ravnina u kojima leže osnovke valjka je visina valjka.

Pravac koji spaja središta tih krugova zove se os valjka.

Dužina koja spaja dvije točke na rubu osnovki i koja je paralelna s osi valjka je izvodnica valjka.

Zakrivljena ploha koja zajedno s njegovim osnovkama omeđuje valjak zove se plašt valjka.



Valjak je uspravan ako mu je izvodnica okomita na ravninu baze. Ako to nije slučaj, valjak je kos.

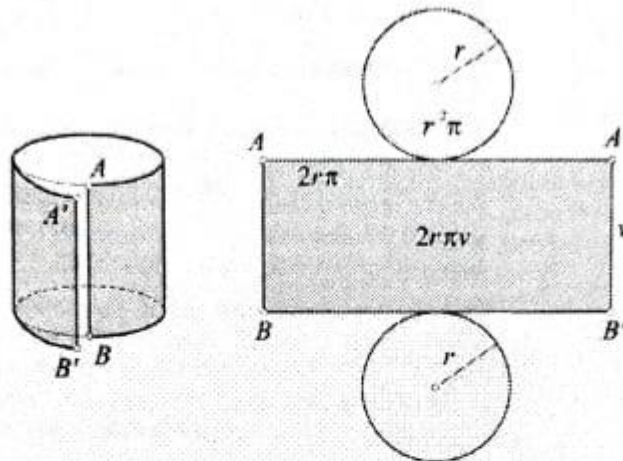
Kao što vidimo, razlikujemo uspravne i kose valjke, no, mićeo se fokusirati na uspravne. Vidimo da je baza (osnovka) valjka krug, pa se moramo prisjetiti formula za površinu i opseg kruga ($r^2\pi$ i $2r\pi$). Jasno nam je sa slike što je visina kod uspravnog valjka.

Nakon toga ćemo nacrtati mrežu valjka, tj. što nastane kad „razvijemo“ valjak: 2 kruga i pravokutnik. Dakle plašt valjka (ono što je ranije bilo pobočje kod kvadra itd. m a ovdje nema bokova pa ga zovemo plašt) je zapravo pravokutnik čija je jedna stranica visina a drugaje duga onoliko koliko je duga kružnica tj. koliki je opseg kruga. Odavde odmah možemo zaključiti da će Oplošje valjka činiti 2 površine kruga i površina plašta (ovog pravokutnika).

Znamo da je površina pravokutnika ab , a ovdje nam je a =visina, b =opseg kruga $2r\pi$, slijedi da je površina plašta $P = 2r\pi \cdot v$.

■ Mreža uspravnog valjka

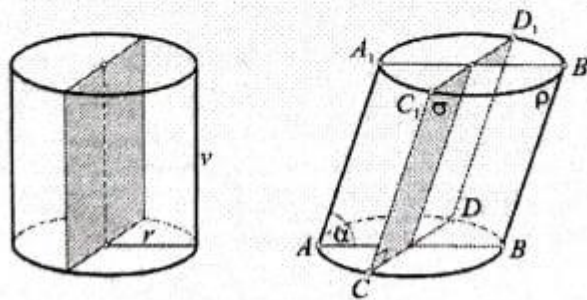
Mreža valjka sastoji se od dvaju krugova (osnovke valjka) i pravokutnika koji nastaje rezanjem plašta valjka duž jedne njegove izvodnice i razgrtanjem u ravninu. Pritom je jedna stranica tog pravokutnika jednaka visini valjka, a druga opsegu osnovke.



Mreža valjka je važna jer je često potrebno raditi razne predmete koji imaju oblik valjka, kao što su limenke, razne kutije, cijevi i sl.

■ Osni presjek

Presiječemo li valjak ravninom koja prolazi središtem njegove baze i paralelna je s izvodnicom, dobiveni se lik naziva osni presjek.



Ako je valjak uspravan, onda su svi osni presjeci sukladni pravokutnici sa stranicama duljina $2r$ i v .

Osni presjeci kosog valjka su paralelelogrami; međutim, oni nisu sukladni. Među njima se ističe jedan koji ćemo opisati.

Valjak presiječemo ravninom ρ koja prolazi izvodnicom i okomita je na ravninu baze. Taj je presjek paralelogram ABB_1A_1 . Njegov kut α je najmanji kut koji izvodnice zatvaraju s bazom. Ovaj presjek nazivamo karakteristični presjek valjka.

Na slici2 vidimo da je presjek valjka također pravokutnik čija je jedna stranica visina, a druga promjer kruga, pa je lako izračunati površinu presjeka ako imamo v i r .

Prepišite si nakon toga primjer 1, te formulu za oplošje valjka. Vidi se na slici kako je izvedena formula, pa ako imate v i r uvrstite u izvedenu formulu, a ako imate zadane površinu kruga i plašta, možda je lakše uvrstiti u ovo iznad odakle je izvedena formula.

Primjer 1.

Ako je plašt uspravnog valjka razgrnut u ravninu pravokutnik čije su stranice dugačke 6 cm i 11 cm, kolika je površina osnog presjeka valjka?

Zadatak ima dva rješenja:

1) Ako je $2r\pi = 6$ i $v = 11$, onda je $2r = \frac{6}{\pi} \approx 1.9$ cm. Površina osnog presjeka valjka tada je $P = 2rv = 21$ cm².

2) Ako je $2r\pi = 11$ i $v = 6$, onda je $2r = \frac{11}{\pi} \approx 3.5$ cm. U ovom je slučaju površina osnog presjeka također jednaka $P = 2rv = 21$ cm².

Je li slučajno što su obje mogućnosti dale isti rezultat? Zašto? Obrazloži!

Zadatak 1. Ako je osni presjek uspravnog valjka pravokutnik sa stranicama duljina 12 cm i 9 cm, kolika je površina plašta valjka?

Oplošje valjka

Vidjeli smo da se mreža valjka sastoji od dvaju krugova i plašta koji ima oblik pravokutnika. Jedna je stranica tog pravokutnika jednaka opsegu osnovke valjka, a druga visini valjka.

Površina jedne osnovke je $r^2\pi$, a površina plašta iznosi $2r\pi v$. Oplošje je:

$$O = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v).$$

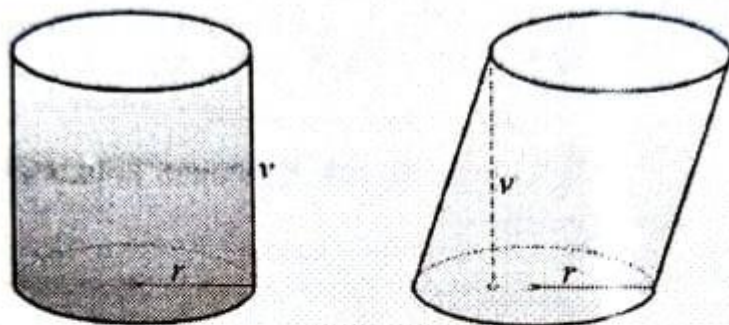
Oplošje uspravnog valjka

Oplošje uspravnog valjka polumjera osnovke r i visine duljine v jednako je:

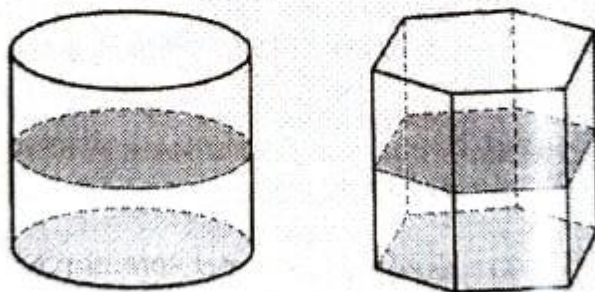
$$O = 2r\pi(r + v).$$

Nakon toga ćete sa slike 4 samo prepisati i formulu za obujam (volumen, zapreminu), a to je baza puta visina, odakle dobijemo konačnu formulu kada uvrstimo površinu baze (kruga), te primjer 3 sa slike 5.

Po volji odaberimo kosi valjak polumjera baze r i visine v te uspravni valjak jednake baze i visine. Postavimo ih tako da im baze leže u istoj ravnini. Svi presjeci ovih dvaju valjaka s ravninama paralelnima s ravninom baze sukladni su krugovi istog polumjera r . Zato su ti presjeci jednake površine. Primjenjujući Cavalierijev princip zaključujemo da su oba valjka istog obujma.



Zamislamo sad uz valjak prizmu iste visine v , s bazom površine $B = r^2\pi$. Presjeci valjka i prizme imaju jednake površine pa su im po Cavalierijevu principu jednaki i obujmi.



Valjak i prizma s bazama jednakih površina i jednakim visinama imaju jednake obujme.

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze r i visine v imaju jednake obujme. Taj obujam iznosi

$$V = r^2 v \pi.$$

Primjer 3.

Osni presjek uspravnog valjka je kvadrat površine 400 cm^2 . Koliki su oplošje i obujam ovog valjka?

Ako je osni presjek valjka kvadrat, onda je visina jednaka promjeru osnovke. $v = 2r = 20 \text{ cm}$.

Izračunajmo oplošje valjka:

$$O = 2r\pi(r + v) = 20 \cdot \pi \cdot 30 = 600\pi \approx 1885 \text{ cm}^2.$$

Obujam ovog valjka je

$$V = r^2\pi v = 100 \cdot \pi \cdot 20 = 2000\pi \approx 6283 \text{ cm}^3.$$

Za zadaću ćete uraditi prva 2 zadatka sa zadnje slike.

1. U prvom zadatku imate zadan omjer visine i polumjera, te oplošje. Kao i u nekim ranijim zadacima s omjerima, uzmemo da je onda polumjer $2k$, a visina $5k$, i uvrstimo u oplošje. Najprije ćemo dobiti k , pa samim tim i polumjer i visinu, te konačno volumen. Vodite računa kako polumjer i visina ne mogu biti negativni, te da negativno rješenje kvadratne jednadžbe samim tim otpada.
Rješenje: $V = 160\pi \text{ cm}^3$.
2. Uvrstimo u formulu za oplošje da je $v = 10 + r$. Obit ćemo kvadratnu jednadžbu i sve potrebno.
Rješenje je $r=4\text{cm}$, $v=14\text{cm}$.

Šaljem vam ispod (na narednoj str) i sliku iz rješenja zadatka, ap ako netko bude htio raditi i više od prva dva zadatka to mu može pomoći, te video linkove:

1. <https://www.youtube.com/watch?v=5pxwtia6mH8>
2. https://www.youtube.com/watch?v=fpgpD_gavd4
- 3.

Za sve ostalo možete se slobodno javiti meni.

Lijep pozdrav.

Zadaci 7.4.

1. Oplošje valjka je $112\pi \text{ cm}^2$. Duljine polumjera osnovke i visine valjka u omjeru su $2 : 5$. Koliki je obujam valjka?
2. Visina valjka je za 10 cm veća od polumjera osnovke, a oplošje valjka iznosi $144\pi \text{ cm}^2$. Odredite duljine polumjera osnovke i visine valjka.
3. Ako je oplošje valjka $8\pi \text{ cm}^2$, a polumjer osnovke jednak visini, izračunajte obujam tog valjka.
4. Plašt valjka načinjen je od kvadrata duljine stranice a . Koliki je polumjer cijevi u koju se savije taj kvadrat? Kolika je duljina te cijevi?
5. Plašt valjka ima površinu $72\pi \text{ cm}^2$, a opseg osnovke je $12\pi \text{ cm}$. Odredite oplošje i obujam tog valjka.
6. Opseg osnovnog presjeka uspravnog valjka je 20 cm , a površina tog presjeka 16 cm^2 . Izračunajte oplošje i obujam valjka.

Rješenja 7.4

- $V = 160\pi \text{ cm}^3$.
- $r = 4 \text{ cm}$, $v = 14 \text{ cm}$.
- $O = 2r\pi(r + v) = 4r^2\pi = 8\pi$, odatle je $r = \sqrt{2} \text{ cm}$, pa je $V = 2\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$.
- $r = \frac{a}{2\pi}$, $d = v = a$.
- $O = 144\pi \text{ cm}^2$, $V = 216\pi \text{ cm}^3$.
- Iz sustava jednačbi $2r + v = 10$, $rv = 8$ dobivamo kvadratnu jednačbu $x^2 - 10x + 16 = 0$ čija su rješenja v i r .
 - $r = 4 \text{ cm}$, $v = 2 \text{ cm}$, $O = 48\pi \text{ cm}^2$, $V = 32\pi \text{ cm}^3$;
 - $r = 1 \text{ cm}$, $v = 8 \text{ cm}$, $O = 18\pi \text{ cm}^2$, $V = 8\pi \text{ cm}^3$.
- Najprije je $2r + v = p$ pa potom imamo:
 - $O = 2r\pi(r + v) = 2r\pi p - 2r^2\pi$. Najveća je vrijednost ove funkcije za $r = \frac{p}{2}$. No tada je $v = 0$ i takav valjak ne postoji.
 - $P = 2r\pi v - 2r\pi p - 4r^2\pi$, te je plašt najveći ako je $r = \frac{p}{4}$.
- Kako je $\frac{m}{V} = 8.9 \text{ g/cm}^3 = \frac{1000 \text{ g}}{V}$, dobije se $V = \frac{1}{8900} \text{ m}^3$ (primijetimo da je $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$). Iz $V = r^2\pi v$ nalazimo $v = 143 \text{ m}$.