

Osnove elektrotehnike II

Pavao Sović



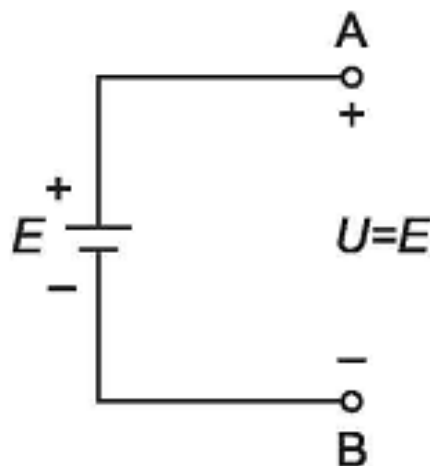
- ▶ Gradivo je predviđeno za dva tjedna nastave ili šest sati. II razred(računalci). Nastavak je gradiva iz Analize mreža i opisuje električne parametre, napon, struja, snaga, impedancije i vrste spojeva u krugu izmjenične struje. U slajdovima su i primjeri zadataka koji će biti provjereni na kontrolnim ispitima u narednom periodu.

Spojevi izvora i impedancija u krugu izmjenične struje

3.1. NAPONSKI I STRUJNI IZVORI

Električni izvori pretvaraju energiju iz nekog oblika npr. toplinsku, kemijsku, potencijalnu u električnu energiju

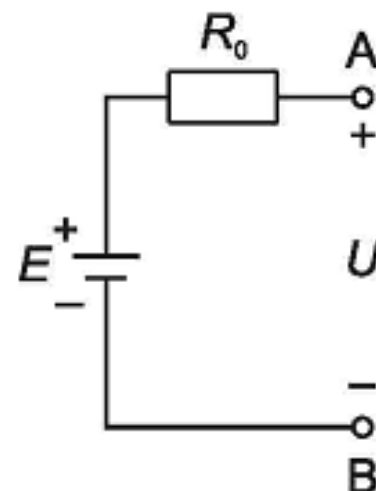
NAPONSKI IZVOR



a) Idealni naponski izvor

E - EMS izvora

U - napon na priključnicama izvora



b) Stvarni naponski izvor

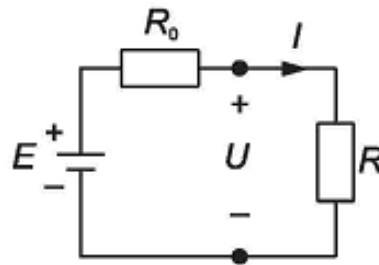
Idealan naponski izvor ima stalni napon na stezaljkama koji je jednak elektromotornoj sili, bez obzira jeli strujno opterećen ili nije.

$$U = E$$

Stvarni naponski izvor može se predočiti serijskim spojem idealnog naponskog izvora elektromotorne sile E i otpora R_0 (unutarjni otpor izvora).

Kada trošilo nije priključeno na izvor (izvor u praznom hodu) , tada struja ne teče tada na priključnicama izvora vlada napon jednak elektromotornoj sili izvora:

$$U = E$$



Slika 3.1-2

Opterećeni stvarni naponski izvor

Kada je trošilo priključeno na stvarni naponski izvor, tada se na priključcima izvora dobije napon koji je od elektromotorne sile manji za pad napona na unutarnjem otporu izvora:

$$U = E - IR_0$$

gdje je:

U napon na priključnicama izvora, V
 E elektromotorna sila izvora, V
 IR_0 pad napona na unutarnjem otporu izvora, V
 R_0 unutarnji otpor izvora, Ω
 I struja, A

napon koji dobije trošilo je:

$$U = IR$$

Da bi trošilo dobilo napon što bliži EMS izvor treba da ima što manji unutarnji otpor. Ako je unutarnji otpor puno manji od otpora trošila, onda ga u nekim slučajevima možemo zanemariti.

Primjer 1

Na stvarni naponski izvor $E = 12 \text{ V}$ i $R_0 = 2 \Omega$ spojeno je trošilo. Izračunajte otpor trošila uz struju $I = 2,4 \text{ A}$.

Zadano:

$$E = 12 \text{ V}$$

$$R_0 = 2 \Omega$$

$$I = 2,4 \text{ A}$$

$$R = ?$$

Rješenje:

Pad napona na trošilu:

$$U = E - IR_0$$

$$U = 12 - 2,4 \cdot 2 = 12 - 4,8 = 7,2$$

$$U = 7,2 \text{ V}$$

$$U < E$$

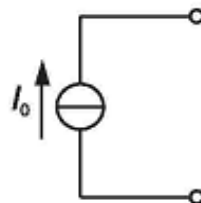
Otpor trošila:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{7,2}{2,4} = 3$$

$$R = 3 \Omega$$

STRUJNI IZVOR

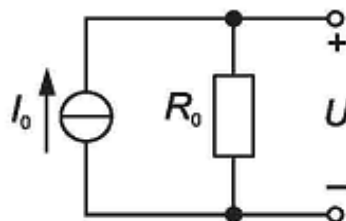
Idealni strujni izvor ima samo izvor stalne struje I_0 iako je njegov unutarnji otpor beskonačan.



Slika 3.1-3

Idealni strujni izvor

Idealni strujni izvor uvijek će trošilu dati stalnu struju I_0 , a napon će ovisiti o otporu trošila. Napon na trošilu ujedno je i napon na priključcima izvora. Struja izlazi iz priključnice višeg potencijala izvora, a ulazi u priključnicu nižeg potencijala.



Slika 3.1-4

Stvarni strujni izvor

Stvarni strujni izvor može se predočiti paralelnim spojem idealnog strujnog izvora I_0 i otpora R_0 (unutarnji otpor izvora).

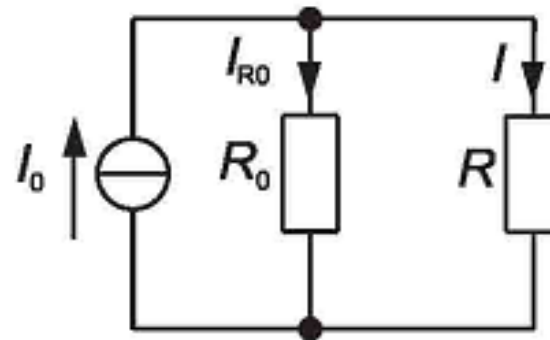
Često se umjesto unutarnjeg otpora računa s unutarnjom vodljivošću izvora G_0 , te vrijedi odnos:

$$G_0 = \frac{1}{R_0}$$

Ako je izvor neopterećen, struja se zatvara preko unutarnjeg otpora izvora:

$$U_0 = I_0 \cdot R_0$$

Tada je ujedno i najveći mogući napon koji može vladati na priključnicama izvora. To je moguće zato što je unutarnji otpor izvora ogroman, pa će i mala struja neopterećenog izvora izazvati veliki pad napona na njegovom paralelno spojenom unutarnjem otporu tj. stezaljkama izvora.



Slika 3.1-5

Opterećeni stvarni izvor

Iz slike se da zaključiti slijedeće:

Kako strujni izvor šalje iz sebe stalnu struju, **onda je potrebno da njegov unutarnji otpor bude što veći** kako bi vukao za sebe što manju struju, a s ciljem da što veći dio struje strujnog izvora bude upućena trošilu za koristan rad. To će biti ako otpor izvora što manji. To je onda i najpovoljniji rad strujnog izvora.

Napon na trošilu a ujedno i na paralelno spojenom izvoru i njegovom unutarnjem otporu prema slici je:

R_0

$$U = I_0 \cdot \frac{R_0 \cdot R}{R_0 + R}$$

Struja I kroz trošilo je prema Ohmovom zakonu:

$I = \frac{U}{R}$, a uvrštenjem gornjeg izraza je:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{I_0 \frac{R_0 \cdot R}{R_0 + R}}{\frac{R}{1}} = \frac{I_0 \cdot R_0 \cdot R}{R(R_0 + R)} = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R}$$

ovdje je vidljivo da je struja trošila I manja od struje izvora I_0 , i to sve više što je struja unutarnjeg paralelnog otpora I_{R0} veća, a to je slučaj tad kad je unutarnji otpor izvora mali.

$$I = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R}$$

$I = I_0 - I_{R0}$, to je jednačba strujnog izvora.

3.

Primjer 1

Na stvarni strujni izvor (prema slici 3.1-5) $I_0 = 5 \text{ A}$ i $R_0 = 180 \text{ } \Omega$ spojeno je trošilo $R = 20 \text{ } \Omega$. Izračunajte napon i struju trošila.

Zadano:

$$I_0 = 5 \text{ A}$$

$$R_0 = 180 \text{ } \Omega$$

$$R = 20 \text{ } \Omega$$

$$I = ?$$

$$U = ?$$

Rješenje:

Struja trošila:

$$I = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R} = 5 \cdot \frac{180}{180 + 20} = 4,5$$

$$I = 4,5 \text{ A}$$

Napon trošila:

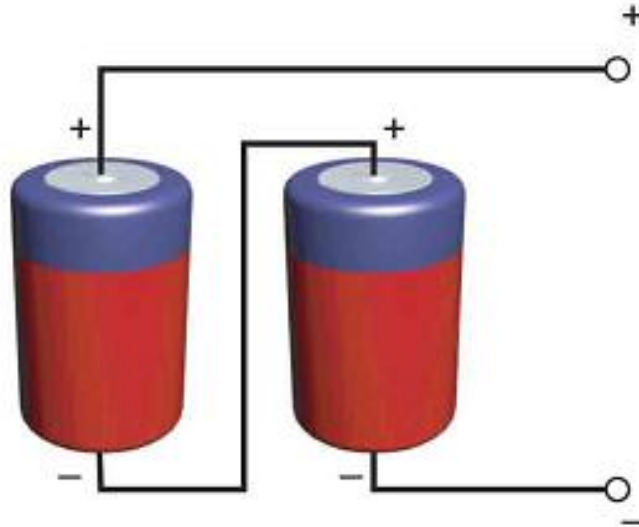
$$U = IR$$

$$U = 4,5 \cdot 20 = 90$$

$$U = 90 \text{ V}$$

3.2 SPOJEVI IZVORA

SERIJSKI SPOJ NAPONSKIH IZVORA



Slika 3.2-1

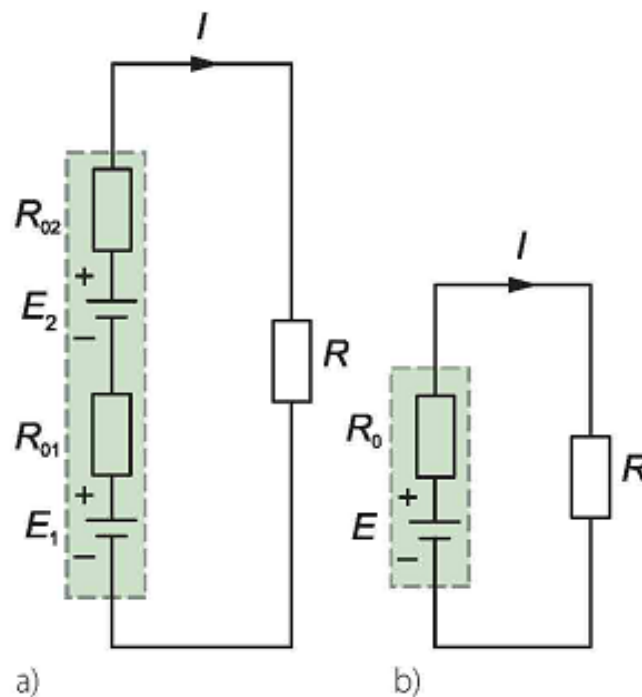
Serijski spoj dviju baterija

Ista struja teče kroz sve izvore u istom smjeru, a ne smije biti veća od pojedine struje izvora. Ukupna EMS je prema II Kirchhoffovom zakonu jednaka zbroju EMS pojedinih izvora:

$$E = E_1 + E_2$$

Ukupan unutarnji otpor jednak je zbroju pojedinih otpora:

$$R_0 = R_{01} + R_{02}$$



Slika 3.2-2

- a) Serijski spoj naponskih izvora i trošila
 b) Nadomjesna shema

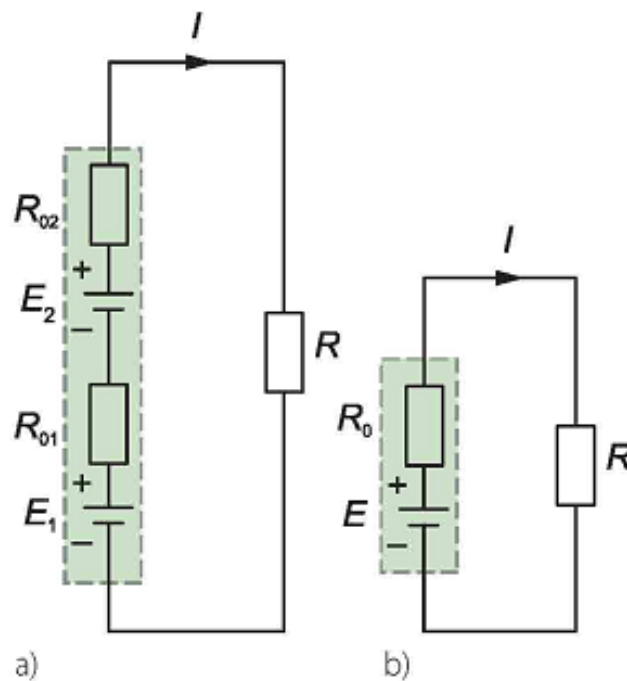
Prema II Kirchhoffovom zakonu ukupna struja kroz spoj kad je trošilo R uključeno je:

$$E = I \cdot R_0 + I \cdot R$$

$$I = \frac{E}{R + R_0}$$

Prema Ohmovom zakonu računamo napon na samom trošilu:

$$U = I \cdot R$$



Slika 3.2-2

- a) Serijski spoj naponskih izvora i trošila
 b) Nadomjesna shema

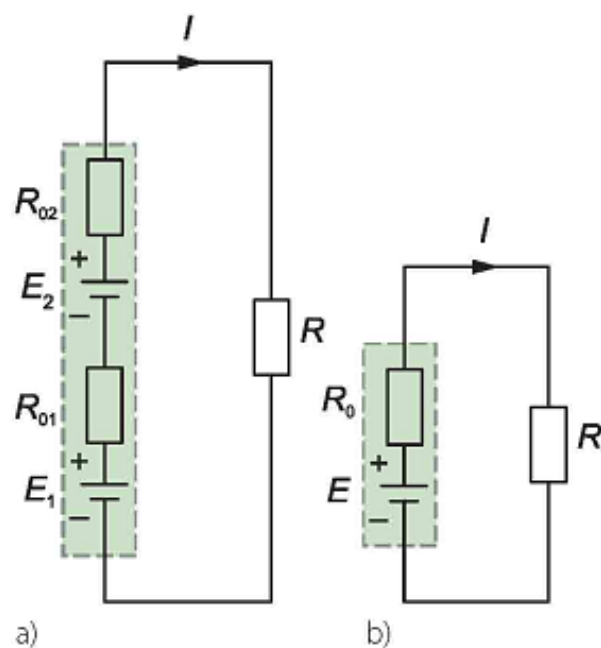
Prema II Kirchhoffovom zakonu ukupna struja kroz spoj kad je trošilo R uključeno je:

$$E = I \cdot R_0 + I \cdot R$$

$$I = \frac{E}{R + R_0}$$

Prema Ohmovom zakonu računamo napon na samom trošilu:

$$U = I \cdot R$$



Slika 3.2-2

- a) Serijski spoj naponskih izvora i trošila
 b) Nadomjesna shema

Prema II Kirchhoffovom zakonu ukupna struja kroz spoj kad je trošilo R uključeno je:

$$E = I \cdot R_0 + I \cdot R$$

$$I = \frac{E}{R + R_0}$$

Prema Ohmovom zakonu računamo napon na samom trošilu:

$$U = I \cdot R$$

Za strujni krug je II Kirchhoffov zakon:

$$E_1 + E_2 = I \cdot R + I \cdot R_{01} + I \cdot R_{02}$$

Algebarski zbroj elektromotornih sila u zatvorenom strujnom krugu jednak je zbroju svih padova napona. Ako je neki izvor obrnuto okrenut u spoju, onda se oduzima od drugih.

Primjer 1

Na serijski spoj dvaju naponskih izvora prema slici spojeno je trošilo. Zadano je: $E_1 = 12 \text{ V}$, $R_{01} = 2 \Omega$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $R_{02} = 1 \Omega$, $R = 9 \Omega$. Izračunajte nadomjesni naponski izvor i jakost struje. Nacrtajte nadomjesnu shemu.

Zadano:

$$E_1 = 12 \text{ V}$$

$$R_{01} = 2 \Omega$$

$$E_2 = 6 \text{ V}$$

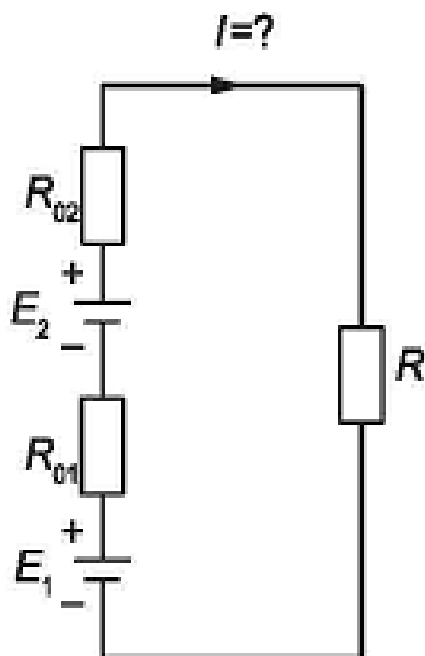
$$R_{02} = 1 \Omega$$

$$R = 9 \Omega$$

$$E = ?$$

$$R_0 = ?$$

$$I = ?$$



Rješenje:

Ukupna EMS izvora:

$$E = E_1 + E_2 = 12 \text{ V} + 6 \text{ V} = 18 \text{ V}$$

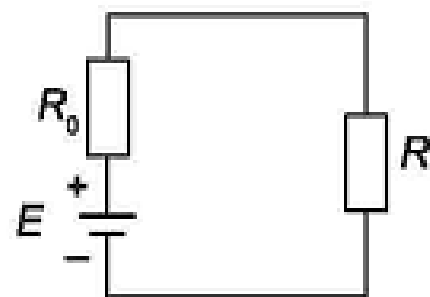
Ukupni unutarnji otpor nadomjesnog izvora:

$$R_0 = R_{01} + R_{02} = 2 \Omega + 1 \Omega = 3 \Omega$$

Jakost struje:

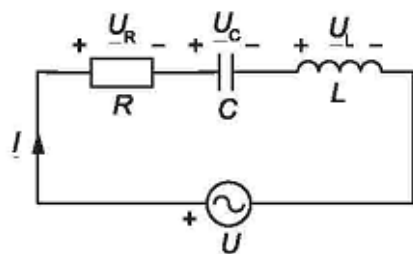
$$I = \frac{E}{R_0 + R} = \frac{18}{3 + 9} \text{ A} = 1,5 \text{ A}$$

Nadomjesna shema:

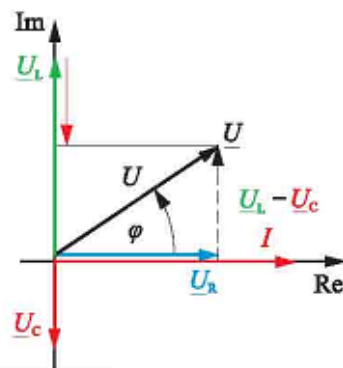


Impedancje

IMPEDANCIJA SERIJSKOG RLC SPOJA



Slika 2.3-10
Serijski RLC spoj



Slika 2.3-11
Fazorski dijagram napona i struje u kompleksnoj ravnini.

Spojimo serijski sva tri elementa. Kroz njih teče jedinstvena sinusna izmjenična struja. Ona se u fazorskom dijagramu crta prva i poklapa se s X osi. Zatim se prema slici crta fazorski dijagram spoja. Pad napona na svakoj komponenti u faznom odnosu sa strujom kako je ranije objašnjeno, te napon u kao zbroj fazora padova napona.

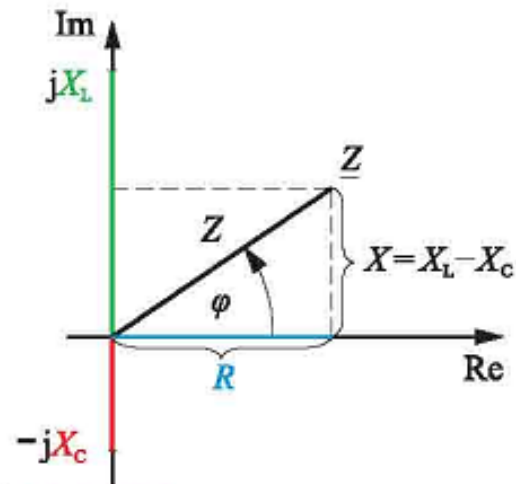
$$\begin{aligned}\underline{U}_R &= R \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_L &= jX_L \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_C &= -jX_C \cdot \underline{I}\end{aligned}$$

Za serijski RLC spoj vrijedi II Kirchhoffov zakon:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \\ \underline{U} &= R \cdot \underline{I} + jX_L \cdot \underline{I} - jX_C \cdot \underline{I} \text{ dijelelim o jednadžbus } \underline{I} \\ \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= R + jX_L - jX_C \\ \underline{Z} &= R + j(X_L - X_C) \\ \underline{Z} &= R + jX\end{aligned}$$

izraz $X = X_L - X_C$ predstavlja ukupni reaktivni otpor spoja. Apsolutnu vrijednost impedancije odredimo iz dijagrama impedancije u kompleksnoj ravnini. Mogu postojati tri opcije:

a) $X_L > X_C$



Slika 2.3-12

Impedancija u kompleksnoj ravnini za $X_L > X_C$

Iz trokuta se Pitagorinim poučkom odredi apsolutna vrijednost impedancije:

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

a fazni kut impedancije koji predstavlja fazni pomak između struje i napona sa dijagrama je pozitivan, spoj je induktivan, impedancija se nalazi u prvom kvadrantu.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{(X_L - X_C)}{R}, \rightarrow \varphi$$

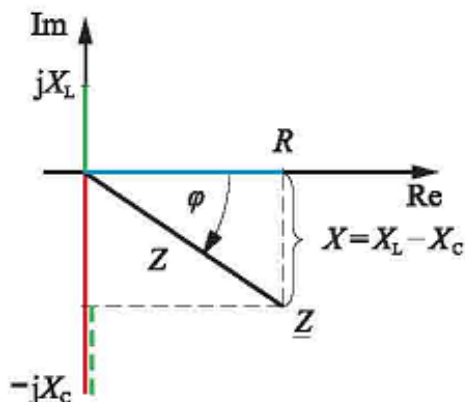
Sad kad smo odredili apsolutnu vrijednost i kut, napišimo impedanciju u kompleksnom polarnom obliku:

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi.$$

b) $X_L < X_C$

spoj je kapacitivan pa se impedancija nalazi u četvrtom kvadrantu.

$$\underline{Z} = R - jX_C$$



Slika 2.3-13

Impedancija u kompleksnoj ravni za $X_L < X_C$

jednako kao i sa induktivnim teretom odredimo apsolutnu vrijednost, samo što je kut impedancije negativan jer struja prethodi naponu, pa je $\text{tg}\varphi$, a tako i φ negativan:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

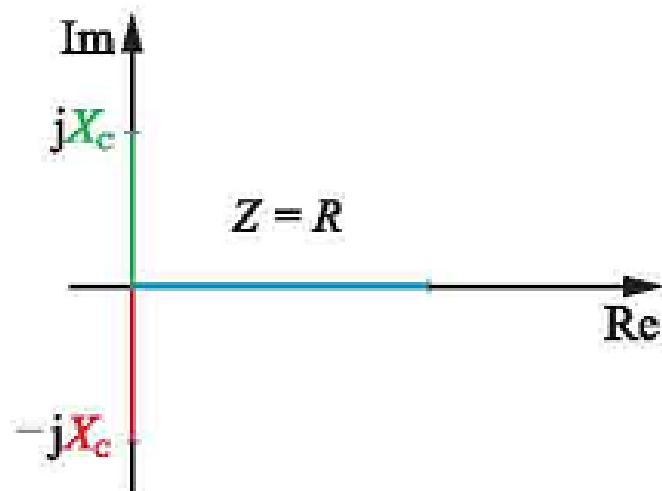
$$\text{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{(X_L - X_C)}{R} = -\frac{X}{R}, \rightarrow -\varphi$$

pa je impedancija spoja u polarnom obliku:

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi, \text{ negativnog kuta.}$$

c) $X_L = X_C$

tada je poništen reaktivni otpor: $Z = R$, pa je spoj u serijskoj ili naponskoj rezonanciji.



Slika 2.3-14

Impedancija u kompleksnoj ravnini za $X_L = X_C$

Primjer 1

Za serijski RLC spoj zadano je: $\underline{I} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, $R = 30 \ \Omega$, $X_L = 50 \ \Omega$ i $X_C = 10 \ \Omega$. Primjenom kompleksnog računa izračunajte napon izvora i napone na komponentama.

Zadano:

$$\underline{I} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$R = 30 \ \Omega$$

$$X_L = 50 \ \Omega$$

$$X_C = 10 \ \Omega$$

$$\underline{U}, \underline{U}_R, \underline{U}_L, \underline{U}_C = ?$$

Rješenje:

Impedancija:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

$$\underline{Z} = 30 + j(50 - 10) = 30 + j40$$

$$\underline{Z} = 30 + j40 \ \Omega$$

Napišimo impedanciju u polarnom obliku.

Prvo računamo apsolutnu vrijednost impedancije i kut φ :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$$

$$Z = 50 \ \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{40}{30} \Rightarrow \varphi = 53,13^\circ$$

$$\underline{Z} = 50 \angle 53,13^\circ \ \Omega$$

Napon izvora:

$$\underline{U} = \underline{I} \underline{Z} = 2 \angle 0^\circ \cdot 50 \angle 53,13^\circ = 100 \angle 53,13^\circ$$

$$\underline{U} = 100 \angle 53,13^\circ \text{ V}$$

Padovi napona na komponentama:

$$\underline{U}_R = \underline{I} R = 2 \angle 0^\circ \cdot 30 = 60 \angle 0^\circ$$

$$\underline{U}_R = 60 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} jX_L = 2 \angle 0^\circ \cdot 50 \angle 90^\circ = 100 \angle 90^\circ$$

$$\underline{U}_L = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} (-jX_C) = 2 \angle 0^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 20 \angle -90^\circ$$

$$\underline{U}_C = 20 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Prema II. Kirehhoffovu zakonu vrijedi:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

Provjerite sami!

Primjer 2

Za serijski RLC spoj izračunajte padove napona na komponentama ako je zadano: $\underline{U} = 140 \angle -26,75^\circ \text{ V}$, $X_L = 94 \Omega$, $X_C = 220 \Omega$ i $R = 250 \Omega$. Nacrtajte fazorski dijagram.

Zadano:

$$\underline{U} = 140 \angle -26,75^\circ \text{ V}$$

$$X_L = 94 \Omega$$

$$X_C = 220 \Omega$$

$$R = 250 \Omega$$

$$\underline{U}, \underline{U}_R, \underline{U}_L, \underline{U}_C = ?$$

Rješenje:

Impedancija:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

$$\underline{Z} = 250 + j(94 - 220) = 250 - j126$$

$$\underline{Z} = 50 - j126 \Omega$$

$$Z = \sqrt{250^2 + 126^2} = 280$$

$$Z = 280 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-126}{250} \Rightarrow \varphi = -26,75^\circ$$

$$Z = 280 \angle -26,75^\circ \Omega$$

Jakost struje:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{140 \angle -26,75^\circ}{280 \angle -26,75^\circ} = 0,5 \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = 0,5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Naponi na komponentama:

$$\underline{U}_R = \underline{I}R = 0,5 \angle 0^\circ \cdot 250 = 125$$

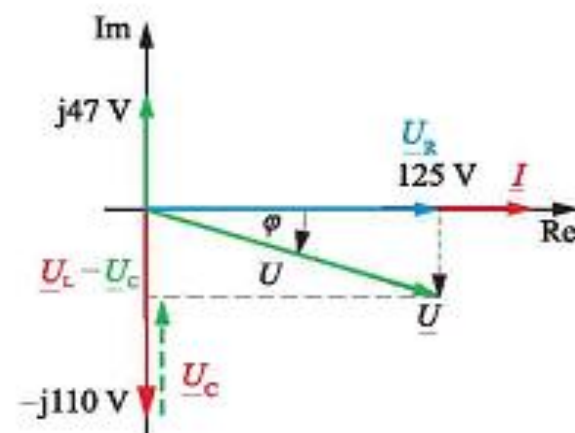
$$\underline{U}_R = 125 \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I} = 0,5 \angle 0^\circ \cdot 94 \angle 90^\circ = 47 \angle 90^\circ$$

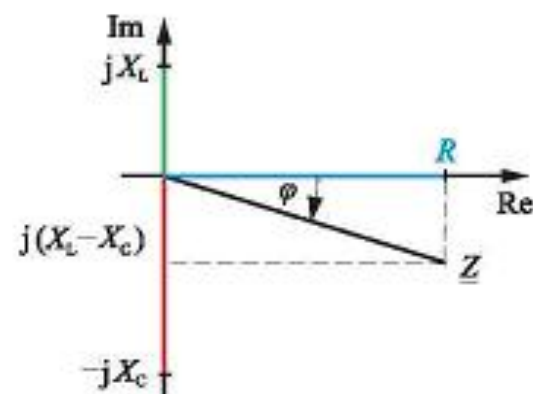
$$\underline{U}_L = 47 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = -jX_C \underline{I} = 0,5 \angle 0^\circ \cdot 220 \angle -90^\circ = 110 \angle -90^\circ$$

$$\underline{U}_C = 110 \angle -90^\circ \text{ V}$$



a) Fazorski dijagram napona i struje za $X_C > X_L$ u kompleksnoj ravnini

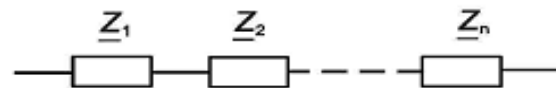


b) Impedancija u kompleksnoj ravnini

SERIJSKI SPOJ IMPEDANCIJA

Ukupna impedancija serijskog spoja više impedancija, jednaka je zbroju impedancija predočenih kompleksnim brojem.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n$$



Slika 2.3-15

Serijski spoj trošila

Primjer 1

Trošila impedancija $\underline{Z}_1 = 2 + j3 \Omega$ i $\underline{Z}_2 = 1 - j7 \Omega$ spojena su serijski na izmjenični izvor sinusnog napona $\underline{U} = 10 \angle -53,13^\circ \text{ V}$. Izračunajte: a) ukupnu impedanciju, b) jakost struje i c) padove napona na trošilima.

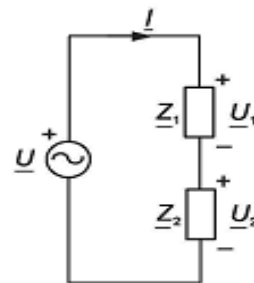
Zadano:

$$\underline{Z}_1 = 2 + j3 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = 1 - j7 \Omega$$

$$\underline{U} = 10 \angle -53,13^\circ \text{ V}$$

$$\underline{Z}, \underline{I}, \underline{U}_1, \underline{U}_2 = ?$$



Rješenje:

a) Ukupna impedancija:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z} = 2 + j3 + 1 - j7 = 3 - j4$$

$$\underline{Z} = 3 - j4 \Omega$$

Pri računanju zadatka potrebno je impedancije pretvoriti u polarni oblik pa računamo apsolutnu vrijednost impedancije i fazni kut:

$$Z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$Z = 5 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-4}{3} \Rightarrow \varphi = -53,13^\circ$$

$$\underline{Z} = 5 \angle -53,13^\circ \Omega$$

b) Jakost struje:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{10 \angle -53,13^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} = 2 \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

c) Kako bismo izračunali padove napona na impedancijama, prvo računamo njihove polarne oblike:

$$Z_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} \Omega = 3,6 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi_1 = 56,3^\circ$$

$$\underline{Z}_1 = 3,6 \angle 56,3^\circ \Omega$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = 3,6 \angle 56,3^\circ \cdot 2 \angle 0^\circ = 7,2 \angle 56,3^\circ$$

$$\underline{U}_1 = 7,2 \angle 56,3^\circ \text{ V}$$

$$Z_2 = \sqrt{1^2 + 7^2} \Omega = 7,1 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-7}{1} \Rightarrow \varphi = -81,87^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 7,1 \angle -81,87^\circ \Omega$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = 7,1 \angle -81,87^\circ \cdot 2 \angle 0^\circ = 14,2 \angle -81,87^\circ$$

$$\underline{U}_2 = 14,2 \angle -81,87^\circ \text{ V}$$

Primjer 2

Tri trošila prema slici spojena su serijski na izmjenični izvor sinusnog napona $\underline{U} = 200\angle 0^\circ \text{ V}$. Ako je $\underline{U}_1 = 50\angle 20^\circ \text{ V}$ i $\underline{U}_2 = 80\angle 40^\circ \text{ V}$, izračunajte napone na trećem trošilu (\underline{U}_3). Prikažite fazorski dijagram napona.

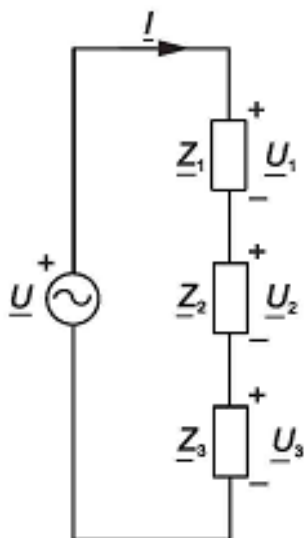
Zadano:

$$\underline{U} = 200\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_1 = 50\angle 20^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = 80\angle 40^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = ?$$



Rješenje:

Potrebno je napone prikazati u algebarskom obliku kompleksnog broja:

$$\underline{U} = 200 \text{ V}$$

$$\underline{U}_1 = 50 \cos 20^\circ + j50 \sin 20^\circ = 49,98 + j17,10$$

$$\underline{U}_1 = 49,98 + j17,10 \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = 80 \cos 40^\circ + j80 \sin 40^\circ = 61,28 + j51,42$$

$$\underline{U}_2 = 61,28 + j51,42 \text{ V}$$

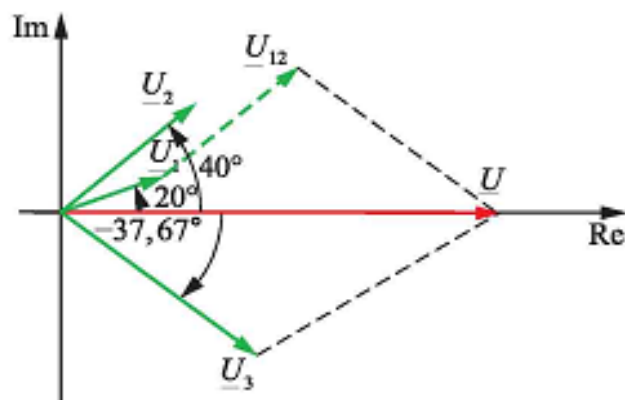
$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 \Rightarrow \underline{U}_3 = \underline{U} - \underline{U}_1 - \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_3 = 200 - 49,98 - j17,10 - 61,28 - j51,42$$

$$\underline{U}_3 = 88,74 - j68,52 \text{ V}$$

Dobiveni rezultat pretvorimo u polarni oblik:

$$\underline{U}_3 = 112,11\angle -37,67^\circ \text{ V}$$



Fazorski dijagram napona u kompleksnoj ravnini

KRAJ