MATEMATIKA – IV RAZRED

23.3.2020. – 27.3.2020.

Nastavna jedinka: Određeni integrali

Pozdrav svima, vraćamo se online nastavi. Vrijeme je za sljedeću lekciju: "Određeni integrali"!

Tijekom prošle sedmice postavljeni su vam materijali iz lekcije „Neodređeni integrali", (Zadaću jedino nije predao Igor Džepić) tako da bi što bolje razumjeli postupak rješavanja određenih integrala trebalo bi da ponovite sljedeće:

1. Tablica neodređenih integrala
2. Neodređeni integrali

Vaš zadatak je pažljivo iščitati skraćenu lekciju o određenim integralima, točnije o rješavanju određenih integrala pomoću Newton-Leibnitzove formule (koja se nalazi u nastavku ovog dokumenta), prepisati ju u teku zajedno s dva navedena primjera, i pogledati videomaterijale kako bi što bolje razumijevanje načina rješavanja određenih integrala!

Vidimo kako se postupak rješavanje ne razlikuje mnogo od određenih integrala, osim što sada imamo granice koje se na kraju uvrste i rezultat je konkretan broj (a ne funkcija).

U prilogu se nalazi i prošireni materijal za one koji žele znati više, a zadaću ću postaviti kasnije kao assingment!

Videomaterijali:

1. https://www.youtube.com/watch?v=CGKbl27kBh8
2. https://www.youtube.com/watch?v=1eZh4AIB9SA (primjeri od 5.00min pa dalje)

Ako bude nejasnoća možete se obratiti preko Edmoda.

$$\int_a^b [cf(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ , \quad a \leq c \leq b$$

2.3. Integralna metoda

U definiciji određenog integrala je sadržana jedna znanstvena metoda,integralna metoda,koja se može provesti u tri koraka.Pretpostavimo da želimo odrediti točnu vrijednost Q neke veličine.

Prvi korak. Promatranu veličinu rastavimo na n malih dijelova sličnih cjelini. Vrijednost svakog malog istog dijela zamijenimo približnom, nama promatranom vrijednošću

$$\Delta Qi.$$

Drugi korak. Odredimo zbroj Qn svih približnih vrijednosti ΔQi :

$$\mathrm{Qn} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \Delta \mathrm{Qi}\,.$$

Treći korak. Graničnim prijelazom (puštanjem da $n \to \infty$), ako ima smisla, izračunamo točnu vrijednost

$$\mathrm{Q} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}n.$$

3. Računanje određenog integrala

3.1. Leibniz-Newtonova formula

Računanje određenog integrala neposredno po definiciji je vrlo sporo i teško.U to smo se uvjerili u Primjeru 68 iz predhodne lekcije.Tako će nam dobro doći formula iz sljedećeg teorema koja uvelike skraćuje "muke po računanju".

Teorem (Leibniz-Newtonova formula). Neka je funkcija $f(x)$ neprekinuta na $[a, b]$ i neka je $F(x)$ bilo koja njena antiderivacija.Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Po mnogima,ovo je najvažnija znanstvena formula. Bez ove formule ni sam infinitezimalni račun ne bi bio ono što jest,središnji znanstveni račun. Pored Leibniza i Newtona za ovu su formulu znali još neki matematičari 17. stoljeća.

Formula je toliko važna zato što povezuje dva, moglo bi se reći udaljena pojma. Na lijevoj strani formule je određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ koji predstavlja površinu, a na desnoj strani je samo razlika, $F(b) - F(a)$,dviju vrijednosti antiderivacije $F(x)$. Uzmu li se u obzir mnogobrojne primjene određenog integrala,formula dobiva još veće značenje. Zbog ove formule je oznaka određenog integrala,uz ispuštanje granica, preuzeta i kao oznaka za skup antiderivacija koji je prozvan neodređenim integralom.

Primjer 69. Pomoću Leibniz-Newtonove formule izračunaj

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx.$$

Rješenje. Određivanje jedne antiderivacije $F(x)$:

$$F(x) = \int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x$$

Računanje razlike $F(2) - F(1)$:

$$F(2) - F(1) = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5$$

Primjena formule:

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = 5$$

□

Napomena. Sve napisano u prethodnom primjeru se obično kraće piše ovako:

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5$$

Primjer 70. Pomoću Leibniz-Newtonove formule izračunaj

$$\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx\,.$$

Rješenje.

$$\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_0^{\pi} = (-\cos\pi - \sin\pi) - (-\cos 0 - \sin 0) = 2$$

□

8. **Izračunaj:**

1) $\int_0^1 (3x^2-x+2)dx$; 2) $\int_0^2 (2+x)^2 dx$;

3) $\int_2^3 (1-x)^2 dx$; 4) $\int_{-1}^2 (3x^2-\frac{1}{2}x+1)dx$;

5) $\int_{-1}^1 \left(1+\frac{x}{2}\right)^3 dx$; 6) $\int_0^2 x(3x+1)^2 dx$;

7) $\int_1^2 \frac{1-8x^3}{2x-1} dx$; 8) $\int_0^1 (3x-\frac{1}{2})^2(x+2)dx$.

9. **Izračunaj:**

1) $\int_1^4 \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$; 2) $\int_0^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$;

3) $\int_0^{-4} \sqrt{(4-3x)^3} dx$; 4) $\int_0^{12} \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x}{4}}}$;

5) $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$; 6) $\int_{-2}^2 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} dx$.

8. 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{56}{3}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $\frac{35}{4}$; 5) $\frac{5}{2}$;
6) 54; 7) $-\frac{10}{3}$; 8) $\frac{39}{8}$.

9. 1) $\frac{4}{7}(8\sqrt{2}-1)$; 2) 9; 3) $-132\frac{4}{15}$; 4) 8;
5) 3; 6) 4.