MATEMATIKA – IV RAZRED

30.3.2020. – 3.4.2020.
Nastavna jedinka: Metoda supstitucije

Tijekom prošlih sedmica postavljeni su vam materijali iz lekcija „Neodređeni i Određeni integrali“, (Zadaću br.2 jedino nisu predali Jusuf Čeho, Pavo Nikša Kristić I Ivan Karivan).

Metodu supstitucije često koristimo kada pod integralom nemamo jednostavnu funkciju koju imamo u tablici, pa da bismo je sveli na tabličnu moramo izvršiti neku zamjenu/supstituciju!

Da biste razumjeli novu lekciju potrebno je da pročitate pažljivo materijal koji se sastoji od 3 stranice, u kratkim crtama zabilježite sebi što je diferencijal, onih 5 koraka kako zamjenjujemo staru varijablu x novom varijablom u, preradite navedenih 5 zadatka u bilježnicu, te pogledate videomaterijale:

1. https://www.youtube.com/watch?v=5vtUs4C3Xhg
2. https://www.youtube.com/watch?v=l-ODLEG_aR4
3. https://www.youtube.com/watch?v=v2DM0lzCfPg
4. https://www.youtube.com/watch?v=B_u57AOttRg

Kao što se i kaže u samoj lekciji supstitucija nije ničim unaprijed određena, samo vježbanjem steknemo osjećaj koja smjena je pogodna, te koja nas najbrže vodi ka tabličnom integralu, a samim tim i rješenju.

Ovaj zadatak 8.15. koji sam pronašao na internetu je čest fazon kod rješavanja integral supstitucijom - ukoliko možete naštimati na izraz da se u brojniku nalazi izvod nazivnika, te rješenje je ln nazivnika…

Pokušajte onda sami uraditi zadatak: $\int \sqrt{3+x}dx$, smjenom 3+x=u odakle, je x=u-3, kad diferenciramo (izvod od 3 je nula) dobijemo dx=du …

Vaš zadatak je slikati sve što sam vam rekao da zapišete, te ovaj dodatni zadatak ako ga uspijete riješiti!

Sretno ☺

Iz tablice elementarnih integrala znamo da vrijedi

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Možemo li integral oblika

$$\int (2x+1)dx$$

izračunati na istovjetan način? Pokušajmo zamijeniti varijablu x novom varijablom u, tako da pojednostavnimo podintegralnu funkciju:

$$u = 2x + 1.$$

Da bismo nastavili s integracijom, moramo i član dx zamijeniti odgovarajućom veličinom po varijabli u.

Dosad smo taj član dx doživljavali poput 'ukrasa' pod znakom integrala, jer on nije ni po čemu sudjelovao u procesu integracije. Međutim, njegova je važnost golema, on je sastavni dio pojma integrala jer opisuje kako se brzo mijenja varijabla integracije.

Izraz dx nazivamo diferencijalom od x. Ako su dvije veličine vezane funkcijskom vezom, onda su sličnom vezom povezani i njihovi diferencijali. Tu vezu nalazimo iz dobro nam poznate relacije za zapis derivacije funkcije

$$\frac{du}{dx} = u',$$

koju možemo napisati na ovaj način:

$$du = u'dx,$$

gdje ona poprima potpuno drukčiji smisao.

Diferencijal funkcije

Diferencijal funkcije u računamo formulom:

$$du = u'dx.$$

— ◆ —

Vratimo se na problem zamjene u postupku integracije. Iz veze $u = 2x + 1$ deriviranjem dobivamo

$$du = u'dx = (2x+1)'dx = 2dx.$$

Sada možemo dovršiti postupak integracije. Pisat ćemo cijeli postupak:

$$\int (2x+1)dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{bmatrix} = \int u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + C = \frac{(2x+1)^2}{4} + C.$$

Izvježbajmo supstituciju na nizu primjera.

Izračunajmo integral $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$.

Supstitucija nije ničim unaprijed određena. Samo pomoću iskustva i vježbe možemo otkriti najjednostavniji način. Ovdje ćemo izabrati

$$u = x+1, \qquad x = u-1, \qquad dx = du.$$

Tako imamo:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} = \int \frac{u-1}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du$$
$$= \ln|u| + \frac{1}{u} + C = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Integriranje zamjenom varijabli

Metodom zamjene varijabli integral računamo ovako:

1) odaberemo u kao funkciju varijable x,

2) izrazimo x preko u,

3) povežemo diferencijale du i dx,

4) zamijenimo podintegralnu funkciju i dx s izrazima po varijabli u i izračunamo integral. Ukoliko to nije moguće, pokušamo odrediti drugu zamjenu,

5) po završetku integracije rezultat napišemo kao funkciju varijable x.

Primjer 2. Izračunajmo $\int x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$.

Odaberimo zamjenu $\quad u = x^3+1, \quad du = 3x^2\, dx, \quad x^2\, dx = \frac{du}{3}.$

Tako dobivamo:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{9} \sqrt{u^3} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3+1)^3} + C.$$

Zadatak 8.14. *Supstitucijom odredite*

$$\int \sqrt[3]{5-6x}dx.$$

Rješenje. Nema pravila koji dio podintegralne funkcije zamijeniti i koju funkciju izabrati za zamjenu. U ovom slučaju mudro je uzeti

$$\begin{aligned} 5-6x &= t^3 \\ -6dx &= 3t^2dt \\ dx &= -\frac{t^2}{2}dt \end{aligned}$$

jer nakon uvrštavanja se dobiva prepoznatljiva podintegralna funkcija.

$$\int \sqrt[3]{t^3} \cdot \frac{-t^2dt}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\int t^3dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + c$$

Budući zadatak traži nalaženje primitivne funkcije za $\sqrt[3]{5-6x}$, u rezultat se mora vratiti varijabla x

$$t = \sqrt[3]{5-6x}$$

pa je tražena primitivna funkcija

$$\int \sqrt[3]{5-6x}dx = -\frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{5-6x}\right)^4 + c.$$

Zadatak 8.15. *Odredite*

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx.$$

Rješenje. Ovaj integral posebno je značajan jer je u **brojniku** sadržana derivacija nazivnika. Cijeli nazivnik može se zamijeniti novom varijablom

$$\begin{aligned} x^2-5x+7 &= t \\ (2x-5)dx &= dt \end{aligned}$$

jer je tada integral po novoj varijabli bitno jednostavniji

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x^2-5x+7| + c.$$

Zadatak 8.16. *Odredite*

$$\int x^2e^{x^3}dx.$$