

## MATEMATIKA – IV razred

16.3.2020.-19.3.2020.

Draga djeco, u narednom periodu družiti ćemo se online.

Na posljednjem satu u školi krenuli smo raditi integrale, tako da bi bilo dobro ponoviti do sada obrađeno gradivo kako bi smo što bolje razumjeli ono koje slijedi. Ponavljanje:

1. Ponoviti tablicu integrala;
2. Prisjetiti se računa s derivacijama/izvodima.

### **NASTAVNA JEDINKA: Neodređeni integrali**

Vaš zadatak je pažljivo iščitati lekciju o neodređenim integralima, te uz pomoć tablice integrala i primjera urađenih na prošlim satima riješiti sljedeće zadatke: 1. 1), 6) 12) i 14). 2. 2), 3), 7), 8).

Za bolje razumijevanje neodređenih integrala možete pogledati sljedeće videolinkove:

1. <https://www.youtube.com/watch?v=Yh1XPfItY&list=PLB2VLM6aHYqMKdkYlvjWPxw7ml2O9RnO>
2. <https://www.youtube.com/watch?v=ZWXwaUjDGSA&list=PLB2VLM6aHYqMKdkYlvjWPxw7ml2O9RnO&index=2>
3. <http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/vjezbe/node3.html>

## 5.3. Neodređeni integral

Veza primitivne funkcije s određenim integralom kroz Newton–Leibnizovu formulu toliko je jaka da se i sama primitivna funkcija zapisuje na sličan način, koristeći znak integrala.

Svake se dvije primitivne funkcije razlikuju za konstantu. To znači da znajući jednu primitivnu funkciju, recimo  $F$ , neku drugu možemo napisati u obliku  $x \mapsto F(x) + C$ , gdje je  $C$  konstanta.

### Neodređeni integral

Neka je  $f$  po volji odabrana funkcija, a  $F$  neka njezina primitivna funkcija. Skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f$  nazivamo neodređenim integralom funkcije  $f$  i označavamo ovako:

$$\int f(x) dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Po dogovoru koristimo jednostavniji zapis

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Evo nekih primjera:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = 2 \sin \frac{x}{2} + C.$$

Ove se formule provjeravaju direktnim deriviranjem: derivacija desne strane mora biti jednaka podintegralnoj funkciji.

### ■ Račun primitivnih funkcija

Za računanje primitivne funkcije (neodređenog integrala) nemamo striktnih pravila poput onih za računanje derivacija. Većina primitivnih funkcija koje poznajemo izvedene su iz tablice derivacija, koju čitamo u suprotnom smjeru.

## Zadaci 5.3.

1. Odredi:

- 1)  $\int 8x^3 dx$ ;
- 2)  $\int x^{\frac{2}{3}} dx$ ;
- 3)  $\int 2x^{-\frac{1}{2}} dx$ ;
- 4)  $\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}}$ ;
- 5)  $\int \pi^2 dx$ ;
- 6)  $\int (-4x) dx$ ;
- 7)  $\int (e - \sqrt{3}) dx$ ;
- 8)  $\int (2\pi - x) dx$ ;
- 9)  $\int x\sqrt{3} dx$ ;
- 10)  $\int x\sqrt{x} dx$ ;
- 11)  $\int x^3\sqrt{x} dx$ ;
- 12)  $\int x^3\sqrt{x}\sqrt{x} dx$ ;
- 13)  $\int x^2\sqrt{x} dx$ ;
- 14)  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$ ;
- 15)  $\int \left(-\frac{\ln \pi}{x^2}\right) dx$ .

2. Odredi:

- 1)  $\int (1 - 2x) dx$ ;
- 2)  $\int (x^2 - 3) dx$ ;
- 3)  $\int 3\pi dx$ ;
- 4)  $\int (x - 1)^2 dx$ ;
- 5)  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ ;
- 6)  $\int (1 - x)\sqrt{x} dx$ ;
- 7)  $\int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\sqrt[4]{x} dx$ ;
- 8)  $\int (2\sqrt{x} - 1)^2 dx$ ;
- 9)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$ ;
- 10)  $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ ;
- 11)  $\int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx$ ;
- 12)  $\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

3. Odredi:

- 1)  $\int (2 - 3x + x^2) dx$ ;
- 2)  $\int x(3x - 2)^2 dx$ ;
- 3)  $\int \frac{x^4 - 1}{x^2} dx$ ;
- 4)  $\int \frac{2\pi - x^3}{x^2} dx$ ;
- 5)  $\int \frac{x^3 - 1}{2x^2} dx$ ;
- 6)  $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x^3} dx$ ;
- 7)  $\int \frac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ ;
- 8)  $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$ ;

9)  $\int \frac{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}}{x} dx$ ; 10)  $\int \frac{(x - 3)^2}{x^5} dx$ .

4. Odredi:

- 1)  $\int 3 \sin 2x dx$ ;
- 2)  $\int (\sin x + \cos 2x) dx$ ;
- 3)  $\int \cos 5x \cos 3x dx$ ;
- 4)  $\int 2 \sin x \cos 3x dx$ ;
- 5)  $\int \sin^2 x dx$ ;
- 6)  $\int \cos^2 x dx$ ;
- 7)  $\int (1 - 2 \cos^2 \frac{x}{2}) dx$ ;
- 8)  $\int \sin^2(2x - \pi) dx$ .

5. Odredi:

- 1)  $\int \frac{1}{2x} dx$ ;
- 2)  $\int \frac{1}{1-x} dx$ ;
- 3)  $\int \frac{2}{3x-2} dx$ ;
- 4)  $\int \frac{x+2}{x+1} dx$ ;
- 5)  $\int \frac{3-x^2}{x} dx$ ;
- 6)  $\int \frac{x^3 - x + 2}{x-1} dx$ .

6. Odredi:

- 1)  $\int e^{-x} dx$ ;
- 2)  $\int e^{1+2x} dx$ ;
- 3)  $\int (e^x + 1)^2 dx$ ;
- 4)  $\int (x^2 + 2e^x) dx$ ;
- 5)  $\int (e^x + 1)^3 dx$ ;
- 6)  $\int 2^{2x+3} dx$ .

7. Nađi primitivnu funkciju svake od sljedećih funkcija:

- 1)  $f(x) = \sin \frac{x}{3} \cdot \cos x$ ;
- 2)  $f(x) = \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2}$ ;
- 3)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{3})}$ ;
- 4)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - 3x)}$ ;
- 5)  $f(x) = \sin 3x \cos 3x$ ;
- 6)  $f(x) = 1 + \sin(1 - x)$ ;
- 7)  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{3} - \cos^2 \frac{x}{3}$ ;