MATEMATIKA – I razred

12.3.2020.-19.3.2020.

Draga djeco, u narednom periodu družit ćemo se online.

Na posljednjem satu u školi krenuli smo raditi korijene, tako da bi bilo dobro ponoviti do sada obrađeno gradivo kako bi smo što bolje razumjeli ono koje slijedi. Ponavljanje:

1. Račun s potencijama;
2. Kako možemo korijen zapisati u obliku potencije?
3. Racionalizacija nazivnika

NASTAVNA JEDINKA: RAČUN S KORIJENIMA

Vaš zadatak je pažljivo iščitati lekciju o računu s korijenima, pokušati razumjeti sve urađene primjere te prepisati sve primjere i formule!

Nakon toga pokušajte riješiti sljedeće zadatke: 1. 1), 5), 7); 2. 1); 5. 1), 3); 6. 4)

Za bolje razumijevanje računa s korijenima možete pogledati sljedeće videolinkove:

1. https://www.youtube.com/watch?v=Dkb1ZHHdfe4
2. https://www.youtube.com/watch?v=qL_Oud0sNRg

7.3. Račun s korijenima

Zapis s korijenima samo je drugi način zapisivanja potencije s racionalnim eksponentom. Međutim, nužno je izvježbati račun s oba zapisa.

Račun s korijenima

Ako su a i b pozitivni realni brojevi, a m i n prirodni brojevi, onda je

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Svojstva korijena su:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; **2.** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; **4.** $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Primjer 1.

Izračunajmo: $\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[4]{1\,000} \cdot \sqrt[6]{10^5}$.

Najprije dani brojevni izraz zapišimo u obliku $\sqrt[3]{10^2} \cdot \sqrt[4]{10^3} \cdot \sqrt[6]{10^5}$.

Kako bismo mogli provesti množenje korijena, primijeniti pravilo **1**, moramo primjenom pravila **4** postići da svi korijeni budu istog eksponenta. Zatim možemo množiti.

Idemo redom:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{10^2} \cdot \sqrt[4]{10^3} \cdot \sqrt[6]{10^5} &= \sqrt[12]{10^8} \cdot \sqrt[12]{10^9} \cdot \sqrt[12]{10^{10}} \\ &= \sqrt[12]{10^8 \cdot 10^9 \cdot 10^{10}} = \sqrt[12]{10^{27}}.\end{aligned}$$

Eksponent korijena i eksponent potencije pod korijenom kratimo prema pravilu **4** te zatim djelomice korjenujemo.

$$\sqrt[12]{10^{27}} = \sqrt[4]{10^9} = 10^2 \cdot \sqrt[4]{10}$$

No primijetimo kako smo zadatak mogli riješiti prevođenjem korijena na potencije:

$$10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{5}{6}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = 10^{\frac{8+9+10}{12}} = 10^{\frac{27}{12}} = 10^{\frac{9}{4}}.$$

Zadatak 1. Obrazloži sljedeći račun s korijenima ukazujući na pravilo koje je pri pojedinom koraku primijenjeno:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^9}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[6]{a^9} : \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^9} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}.$$

— ◆ —

Sva pravila za račun s korijenima slijede iz dokazanih svojstava za račun s potencijama s racionalnim eksponentom:

1. $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$;

4. $\sqrt[np]{a^{mp}} = (a^{mp})^{1/np} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Ova svojstva vrijedit će u nekim situacijama i kada je neki od brojeva a i b negativan. Međutim, tada je uvijek potreban oprez.

Što je, na primjer, s izrazom $\sqrt[n]{a^n}$? Vrijedi li za svaki realni broj a jednakost $\sqrt[n]{a^n} = a$?

Tako imamo

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2, \qquad \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{16} = 2,$$

pa ovdje jednakost vrijedi. Međutim, ako je n paran i a negativan, bit će

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

pa sad odgovor nije -2 već 2!

Zapamti!

1. Ako je a realni broj i n neparan, onda je $\sqrt[n]{a^n} = a$.

2. Ako je a realni broj i n paran, onda je $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Parni korijen pozitivnog broja uvijek je pozitivni broj.

Primjer 2. Uvjeri se u istinitost sljedećih jednakosti:

1) $\sqrt[3]{6^3} = 6$; **2)** $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$;

3) $\sqrt[4]{6^4} = |6| = 6$; **4)** $\sqrt[4]{(-6)^4} = |-6| = 6$.

Zadaci 7.3.

1. Provjeri i obrazloži:

1) $\sqrt[4]{81}=3$; 2) $\sqrt[3]{0.125}=\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}=\frac{2}{5}$;

5) $\sqrt[6]{64}=2$; 6) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{3}{5}$;

7) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}=\frac{5}{6}$; 8) $\sqrt[4]{0.0625}=0.5$.

2. Izračunaj:

1) $\sqrt{2.56\cdot 10^{-2}}+2\cdot\sqrt[3]{0.008}$;

2) $\sqrt[6]{9^3\cdot 1000^2}-\sqrt{0.25\cdot 10^2}$;

3) $\sqrt[4]{1.6\cdot 10^{-3}}+2\cdot\sqrt[3]{0.125}$;

4) $\sqrt[3]{0.09\cdot 300}+5\cdot\sqrt{0.16}$.

3. Izračunaj:

1) $\sqrt[3]{8^4}$; 2) $\sqrt[4]{4^6}$; 3) $\sqrt[8]{16^2}$;

4) $\sqrt[6]{27^2}$; 5) $\sqrt[9]{125^6}$; 6) $\sqrt[4]{81^3}$;

7) $\sqrt[12]{64^8}$; 8) $\sqrt[8]{625^4}$.

4. Ako je $a>0$ te $n\in\mathbf{N}$, koliko je:

1) $\sqrt[3]{a^{3n}}$; 2) $\sqrt[3]{a^{6n-3}}$; 3) $\sqrt[4]{a^{4n+12}}$;

4) $\sqrt[5]{a^{5n+10}}$; 5) $\sqrt[3]{a^{9n+6}}$; 6) $\sqrt[n]{a^{3n}}$;

7) $\sqrt[2n]{a^{6n}}$; 8) $\sqrt[n-1]{a^{2n-2}}$?

5. Primjenjujući jednakost $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, izračunaj:

1) $\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{10}$; 2) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}$;

3) $\sqrt[4]{40}\cdot\sqrt[4]{250}$; 4) $\sqrt[4]{50}\cdot\sqrt[4]{200}$;

5) $\sqrt[5]{3^9}\cdot\sqrt[5]{3^{11}}$; 6) $\sqrt[6]{4^3}\cdot\sqrt[6]{8^4}$.

6. Izračunaj:

1) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; 2) $\sqrt[4]{625\cdot 16}$;

3) $\sqrt[3]{75\cdot 45}$; 4) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 0.5^{15}}$;

5) $\sqrt[6]{\frac{1}{8^4}\cdot 9^3}$; 6) $\sqrt[4]{25^6\cdot\frac{1}{16^3}}$.

7. Izračunaj:

1) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{625}}$; 3) $\frac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{64}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{0}}$

8. Provjeri jednakosti:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$;

2) $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

3) $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$;

4) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

9. Djelomice korjenuj:

1) $\sqrt[3]{54}$; 2) $\sqrt[3]{1080}$; 3) $\sqrt[5]{160}$;

4) $\sqrt[4]{80}$; 5) $\sqrt[4]{324}$.

10. Pojednostavni:

1) $\sqrt[6]{16^{n+3}:4^{2n-3}}$; 2) $\sqrt[4]{9^{3n+2}:27^{2n-}}$

3) $\sqrt[n]{125^{n+2}:25^{n+1}}$; 4) $\sqrt[n+1]{8^{2n+2}:16^{n}}$

5) $\sqrt[5]{25^{4n-1}:125^{n+1}}$; 6) $\sqrt[2n]{27^{2n+4}:81^{n}}$

11. Pomnoži:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{27}$;

3) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}$; 4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}$;

5) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[12]{5}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[4]{8}$

7) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{32}$; 8) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$

12. Ako je $a>0$, pomnoži:

1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$;

3) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; 4) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$;

5) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$; 6) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$;

7) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[8]{a^7}$; 8) $a\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$.

13. Ako je $a>0$, $n\in\mathbf{N}$ izračunaj:

1) $\sqrt{a^n}\cdot\sqrt[4]{a^{2n-1}}\cdot\sqrt[8]{a^{n+2}}$;

2) $\sqrt[3]{a^{n-1}}\cdot\sqrt{a^{n+1}}\cdot\sqrt[6]{a^{n-1}}$;

3) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[2n]{a^n}\cdot\sqrt[3n]{a^{2n-3}}$;

4) $\sqrt[3]{a^n}\cdot\sqrt[6]{a^{2n+1}}\cdot\sqrt[9]{a^{3n+3}}$;

5) $\sqrt[n]{a^{n-1}}\cdot\sqrt[2n]{a^{n+1}}\cdot\sqrt[4n]{a^{n+2}}$;

6) $\sqrt[3]{a^n}\cdot\sqrt[4]{a^{n+2}}\cdot\sqrt[6]{a^{n+3}}$.